PROSPECTUS
ISSN 2674-8576

DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.7877640 Artigo Original

COMPRIMENTOS DE CURVAS DA FUNÇÃO POTÊNCIA NO INTERVALO [0,1]

CURVES LENGTH OF THE POWER FUNCTION IN THE INTERVAL [0.1]

Felipe Batista de Lima Araújo

Graduado em Tecnologia em Fabricação Mecânica (Fatec Mogi Mirim "Arthur de Azevedo"). Licenciando em Matemática (Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP).

Contato: felipebl.araujo@gmail.com

RESUMO

Da mesma forma que a tarefa de determinar a primitiva (integral indefinida) de algumas funções pode ser simples e rápida, para outras funções a tarefa é laboriosa necessitando do uso de artifícios. Existem também casos de funções cujas primitivas são impossíveis de serem obtidas por meio de métodos elementares. Nas situações mais complexas, uma opção é recorrer à obtenção de aproximações por meio de métodos de integração numérica para se calcular a integral definida. Um dos métodos de notável importância foi demonstrado por Karl Friedrich Gauss, trata-se da Quadratura Gaussiana ou também chamada Quadratura de Gauss-Legendre. No presente trabalho se apresentará uma aplicação conjunta da Quadratura Gaussiana com o software Wolfram Mathematica® no contexto do estudo do comportamento dos valores do comprimento da curva da função potência no intervalo fechado $[0,1]$.

Palavras-chave: Integral. Definida. Quadratura. Gauss. Mathematica.

ABSTRACT

In the same way that the task of determining the antiderivative (indefinite integral) of some functions can be simple and fast, for other functions the task is laborious, requiring the use of artifices. There are also cases of functions whose primitives are impossible to obtain through elementary methods. In more complex situations, one option is to resort to obtaining approximations through numerical integration methods to calculate the definite integral. One of the methods of notable importance was demonstrated by Karl Friedrich Gauss, it is the Gaussian Quadrature or also called Gauss-Legendre Quadrature. In the present work, a joint application of the Gaussian Quadrature with the Wolfram Mathematica® software will be presented in the context of the study of the behavior of the values of the length of the curve of the power function in the closed interval $[0,1]$.

Keywords: Integral. Defined. Quadrature. Gauss. Mathematica.

DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.7877640 Artigo Original

INTRODUÇÃO

O cálculo é uma disciplina fundamental nas ementas dos cursos de exatas como engenharia e tecnologia, haja vista a necessidade de se utilizar suas ferramentas em problemas inerentes a tais áreas. Quando se pensa nas técnicas de integração de uma função, a lista de exemplos de aplicação é apreciável. Vários exemplos podem ser encontrados no livro-texto Stewart (2013) que possui um capítulo dedicado exclusivamente para aplicações da integração. Outra sugestão interessante é o livro-texto Hibbeler (2010) que mostra como é feito o cálculo da força resultante que age sobre uma viga submetida a cargas distribuídas. Aqui o enfoque se dará à aplicação de integrais no comprimento de curvas de funções com a intenção de destacar o método da Quadratura Gaussiana, uma técnica de integração numérica que se difere das técnicas de aproximação por Trapézios e a Regra de Simpson por adotar pontos de avaliação que não são igualmente espaçados (BURDEN; FAIRES, 2010).

No intuito de ilustrar como a Quadratura Gaussiana é executada, escolheu-se trabalhar com a função potência. Dado um número real $n \neq 0$, a função $f(x) = x^n$ é denominada função potência. Aqui, a abordagem restringiu-se ao estudo dos casos em que $n \geq 0$ no intervalo $0 \leq x \leq 1$.

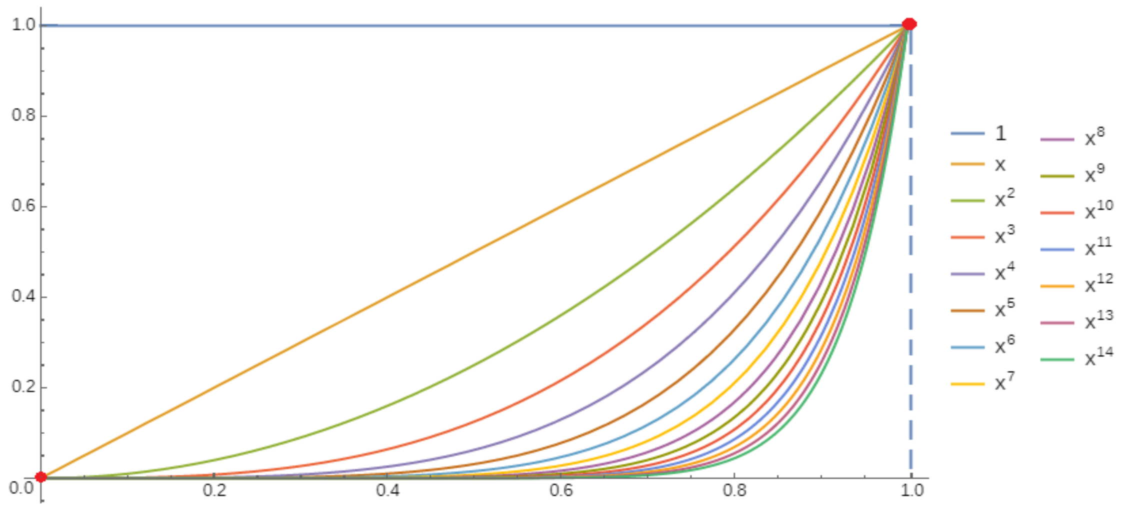

Figura 1 - Gráfico da função potência para alguns valores de n no intervalo $[0,1]$.

Fonte: O autor.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a primitiva de $f(x)$ é uma função $F(x)$ tal que:

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

No caso da função potência e considerando restrições estabelecidas, sua primitiva $F(x)$ é dada pela equação geral abaixo;

$$F(x) = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + K$$

No entanto, se o objetivo for obter uma expressão para descrever os valores do comprimento C da curva $f(x) = x^n$ em um intervalo $[a,b]$, a situação atinge um considerável nível de complexidade, uma vez que C é definido pela integral logo abaixo (que não possui uma "fórmula" para primitiva direta como $F(x)$):

$$C = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}\, dx$$

Vale ressaltar que tanto $f(x)$ como sua derivada devem ser contínuas no intervalo em $[a,b]$. O comprimento C de $f(x) = x^n$ no intervalo $[0,1]$ fica definido como:

$$C = \int_0^1 \sqrt{1 + (n\,x^{(n-1)})^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + n^2\,x^{(2n-2)}}\, dx$$

O interesse para que $0 \leq x \leq 1$ se deve ao fato de que, dentro das restrições já mencionadas, as curvas de $f(x) = x^n$ se interceptam nos pontos $(0,0)$ e $(1,1)$ qualquer que seja o valor de n.

O aspecto gráfico de $f(x)$ para diversos valores de n é mostrado na Figura 1. Nesse intervalo, qual seria o comprimento máximo a ser obtido? O que acontece com o valor de C para $f(x)$ no intervalo $[0,1]$ com n tendendo a $+\infty$? A aplicação da Quadratura Gaussiana junto com recursos computacionais do software Wolfram Mathematica® é uma alternativa para dar a resposta dessas perguntas.

QUADRATURA GAUSSIANA

A Quadratura Gaussiana é um método para aproximar valores da integral definida de uma função $p(x)$ contínua em um intervalo $[a,b]$. Foi demonstrada por Karl Friedrich Gauss em 1814. A Quadratura Gaussiana fornece a seguinte aproximação:

$$\int_a^b p(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{k} c_i\, p(x_i)$$

Os pontos para avaliação são escolhidos de uma maneira ideal, em vez de igualmente espaçada (como na Regra de Simpson ou dos Trapézios). Os nós são pontos $x_1, x_2, \cdots, x_k$ do intervalo $[a,b]$ e os coeficientes $c_1, c_2, \cdots, c_k$ são escolhidos para minimizar o erro esperado obtido na aproximação (BURDEN; FAIRES, 2010).

De acordo com Burden e Faires (2010), se $p(x)$ for um polinômio de grau $2k-1$ ou menos, a aproximação

$$\int_{-1}^{1} p(x)\ dx \approx c_i\, p(x_i)$$

é exata. Seja considerada a Quadratura para $k=2$. Nos casos em que $p(x)$ é $1, x, x^2, x^3$ sabemos como obter valores exatos da integral. Desse modo, pode-se montar o seguinte sistema de equações:

$$c_1 + c_2 = \int_{-1}^{1} dx = 2\ (a) \qquad x_1c_1 + x_2c_2 = \int_{-1}^{1} x\ dx = 0\ (b)$$

$$x_1^2c_1 + x_2^2c_2 = \int_{-1}^{1} x^2\ dx = \frac{2}{3}\ (c) \qquad x_1^3c_1 + x_2^3c_2 = \int_{-1}^{1} x^3\ dx = 0\ (d)$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (a), (b), (c) e (d), chega-se que na seguinte aproximação:

$$\int_{-1}^{1} p(x)\ dx \approx p\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + p\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$$

Essa é a forma mais simples para aproximação, a Quadratura Gaussiana para 2 pontos. A Quadratura pode ser feita também tomando-se mais pontos. No trabalho de Neto (2018) pode ser encontrada uma tabela para valores de até 14 pontos.

Para compreensão do processo que utiliza mais pontos é necessário ter a fundamentação teórica dos Polinômios de Legendre (por isso também é chamada Quadratura de Gauss-Legendre) e da Interpolação Polinomial de Lagrange.

Por não ser o escopo desse trabalho não se entrará nos detalhes, até porque as bibliografias mencionadas nessa seção abrangem com apreciável nível de detalhe tais conceitos.

WOLFRAM MATHEMATICA

O Wolfram Mathematica® ou simplesmente Mathematica é um software de programação de alto nível da empresa Wolfram Research. É capaz de resolver cálculos numéricos, cálculo algébrico simbólico, resolução de sistemas de equações, cálculo de integrais e geração de gráficos e animações 2D e 3D.

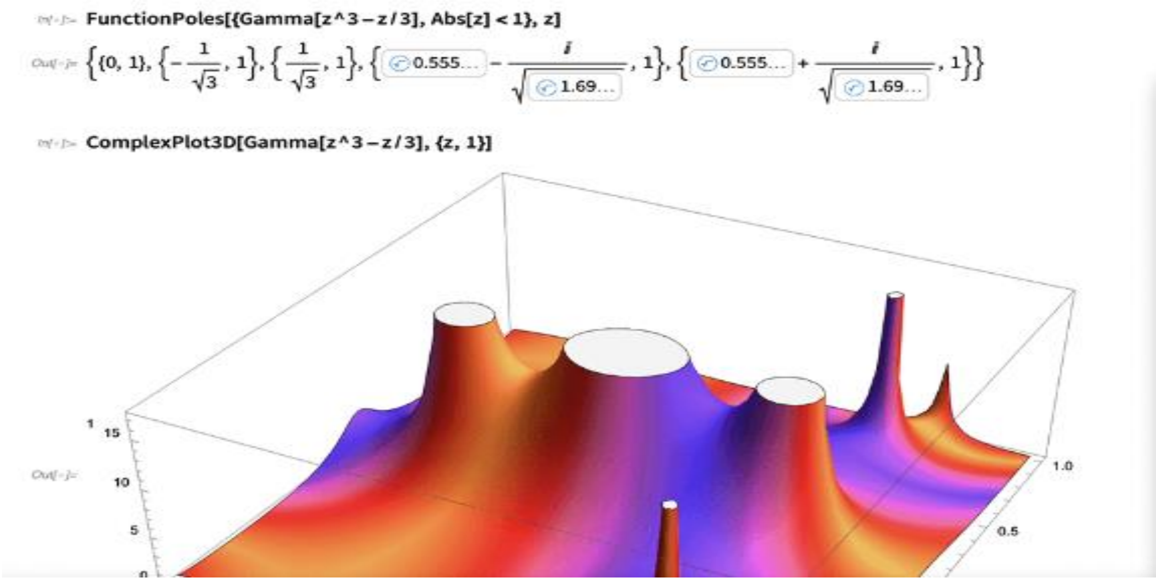

Figura 2 – Tela do software Wolfram Mathematica® ilustrando gráficos gerados.

Fonte: Extraído do site do Wolfram Mathematica®: [Wolfram Mathematica: Computação técnica moderna]

Alguns dos comandos mais utilizados são: *Plot, PlotStyle, Show, PlotLegend, FindRoot* e *Limit.*

- *Plot:* gera o gráfico de uma função num intervalo definido.
- *PlotStyle:* configura aspectos visuais do gráfico, como por exemplo cor da curva.
- *Show:* permite mostrar mais de um gráfico em uma mesma imagem.
- *PlotLegend*: insere legendas no gráfico.
- *FindRoot*: determina a raiz de uma equação a partir de um valor aproximado informado na sintaxe do comando.
- *Limit:* retorna o limite de uma expressão.

As sintaxes e informações detalhadas sobre os códigos podem ser encontradas em Wolfram Language & System Documentation Center.

APLICANDO A QUADRATURA GAUSSIANA PARA 2 PONTOS

Seja $C(x) = \sqrt{1 + n^2\, x^{(2n-2)}}$. Para avaliar o comprimento das curvas da função potência em $[0,1]$, deve-se calcular a seguinte integral:

PROSPECTUS
ISSN 2674-8576

DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.7877640 Artigo Original

$$C = \int_0^1 \sqrt{1 + n^2\, x^{(2n-2)}}\, dx$$

O primeiro procedimento a ser executado é a mudança dos extremos de integração, uma vez que a Quadratura Gaussiana é baseada no intervalo $[-1,1]$. Conforme mostrado por Neto (2018), para mudarmos $\int_a^b C(x)\, dx$ para $\int_{-1}^1 p(u)\, du$ usamos a seguinte mudança de variáveis:

$$x = \frac{1}{2}(b-a)u + \frac{a+b}{2} \Rightarrow \int_a^b C(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 p(u)du$$

Para $a = 0,\ b = 1$ e considerando $C(x) = p(u)$:

$$x = \frac{u+1}{2} \Rightarrow \int_0^1 C(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \sqrt{1 + n^2\left(\frac{u+1}{2}\right)^{(2n-2)}}\, du$$

Considerando a Quadratura para dois pontos, obtém-se uma expressão para o comprimento C da função potência no intervalo $[0,1]$ em função do expoente n:

$$C = \frac{\sqrt{1 + n^2\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{2}\right)^{(2n-2)}}}{2} + \frac{\sqrt{1 + n^2\left(\frac{\frac{-\sqrt{3}}{3}+1}{2}\right)^{(2n-2)}}}{2}$$

$$C = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + n^2\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)^{(2n-2)}} + \sqrt{1 + n^2\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^{(2n-2)}}\right)$$

COMPORTAMENTO DOS VALORES – RESULTADOS OBTIDOS COM O MATHEMATICA

No intervalo $[0,1]$ o comprimento máximo que uma curva do tipo $f(x) = x^n$ assume é aproximadamente 1,60254. Tal valor foi obtido a partir da solução da equação $\frac{dC}{dn} = 0$ com o comando *FindRoot* que forneceu que o valor limite ocorre para $n \approx 4{,}2011$. Com o comando *Limit*, verificou-se que comprimento limite de C com $n \to +\infty$ é 1. O gráfico $C\ versus\ n$ foi obtido com os comandos *Show* e *Plot.* As sintaxes dos comandos encontram-se na Figura 3. O gráfico $C\ versus\ n$ está ilustrado na Figura 4.

PROSPECTUS
ISSN 2674-8576

DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.7877640 *Artigo Original*


```
Comprimentos_poten...01.nb                                File   Edit

c[n_] := 0.5*(Sqrt[1+(n^2)*((Sqrt[3]+3)/6)^(2 n-2)]+Sqrt[1+(n^2)*((-Sqrt[3]+3)/6)^(2 n-2)])

In[20]:= FindRoot[c'[n] == 0, {n, 4}]

Out[20]= {n → 4.2011}

In[38]:= Limit[0.5*(Sqrt[1+(n^2)*((Sqrt[3]+3)/6)^(2 n-2)]+Sqrt[1+(n^2)*((-Sqrt[3]+3)/6)^(2 n-2)]),
           n → +∞]

Out[38]= 1.
```

Figura 3 – Captura de tela do software Wolfram Mathematica® com os comandos utilizados.

Fonte: O autor.

```
In[36]:= Show[Plot[{0.5*(Sqrt[1+(n^2)*((Sqrt[3]+3)/6)^(2 n-2)]+Sqrt[1+(n^2)*((-Sqrt[3]+3)/6)^(2 n-2)])},
           {n, 0, 40}, PlotStyle → Blue], Plot[c[4.2011], {n, 0, 40}, PlotStyle → Red]]
```

Out[36]=

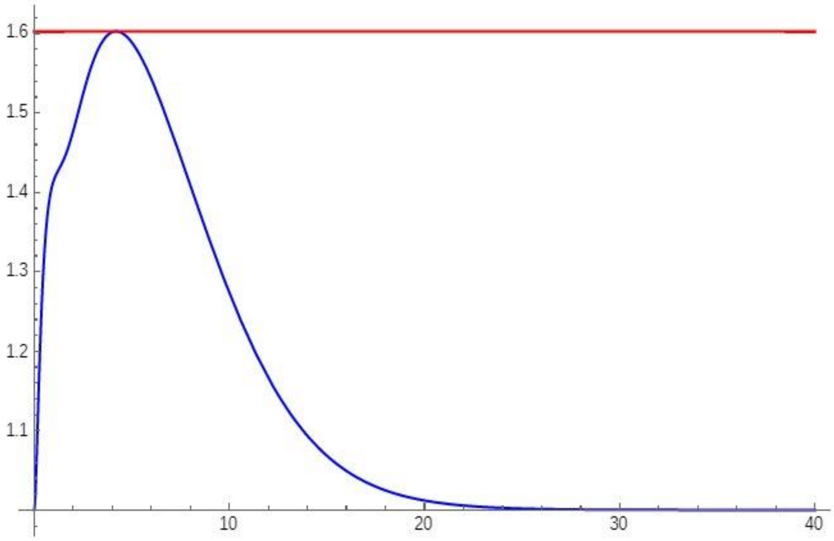

Figura 4 – Sintaxe do comando *Show* e gráfico com comprimentos em função do expoente.

Fonte: O autor.

CONCLUSÃO

A aplicação método da Quadratura Gaussiana somada com a utilização dos recursos algébricos e gráficos do software Wolfram Mathematica® permitiu determinar uma expressão para aproximar os valores do comprimento das curvas da função potência no intervalo $[0,1]$ e também descrever o comportamento desses valores em função do expoente n. Num primeiro momento, olhando o apenas o gráfico de $f(x) = x^n$ para alguns valores de n (Figura 1), pode-se ter a impressão de que C tende a 2 para valores de n arbitrariamente grandes em módulo. No entanto, a análise permitiu mostrar que após atingir o valor limite aproximado de 1,60254, os comprimentos tendem a 1 com n tendendo a $+\infty$.

REFERÊNCIAS

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Numerical Analysis**. 9 ed. Florence: Cengage Learning, 2010.

HIBBELER, Russel C. **Ingeniería Mecánica**. 12 ed. Estado de México: Prentice Hall, 2010.

NETO, Franklin Pedro da Silva. **Polinômios de Legendre e Quadratura Gaussiana**, 2018. 59 fls. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2018.

STEWART, James. **Cálculo**, Volume I. 7ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

O autor declarou não haver qualquer potencial conflito de interesses referente a este artigo.